Omotetia e similitudine tra le figure piane

Omotetia

Siano dati in un piano un punto O e un numero reale *k* non nullo: si dice omotetia di centro O e rapporto *k* la corrispondenza che associa a un punto *P* del piano un punto *P'* della retta *OP* tale che sia OP'=IkIOP, in modo che P' si trovi dalla tessa parte di P rispetto a O, se *k* è positivo, o da parte opposta di O, se *k* è negativo.

O si dice centro dell'omotetia e k rapporto di omotetia.
Se k è positivo l'omotetia si dice diretta, se k è negativo si dice inversa o indiretta. Se k è uguale a 1 l'omotetia è la trasformazione identica, se k è uguale a -1 è la simmetria centrale di centro O. Punti corrispondenti in una omotetia si dicono omotetici.
Nell'omotetia il centro è l'unico punto unito.
Due figure di uno stesso piano F ed F' si dicono omotetiche nell'omotetia di centro O e rapporto k se F' è formata da tutti i punti omotetici dei punti di F.

Proprietà fondamentali dell'omotetia

In una omotetia di centro O e rapporto k

1) a una retta *r* corrisponde una retta *r'* a essa parallela;
2) a una semiretta corrisponde una semiretta parallela, con essa concorde
3) se *k* è positivo, discorde se *k* è negativo;
4) a un segmento corrisponde un segmento parallelo e concorde se *k* è positivo, parallelo e discorde se *k* è negativo, e avente col segmento dato il rapporto *k;*
5) a un angolo corrisponde un angolo congruente.

Poligoni omotetici

Per le proprietà dell'omotetia, l'omotetico di un poligono è un poligono che ha i lati paralleli a quelli del poligono dato e in poligoni omotetici i lati corrispondenti sono proporzionali e gli angoli corrispondenti sono congruenti.

Circonferenze omotetiche

Teorema: La figura omotetica di una circonferenza è una circonferenza.

Siano date la circonferenza di centro C e l'omotetia di centro O e rapporto *k*; si congiunga il punto O con un punto qualunque *A* della circonferenza e si prenda il punto *A'* sulla semiretta *OA* se *k* è positivo e sul prolungamento di *OA,* oltre O, se *k* è negativo, in modo che sia *OA'* : *OA* = Ikl. Diciamo che quando *A* descrive la circonferenza data, *A'* descrive una seconda circonferenza.

Teorema: Due circonferenze sono sempre omotetiche.

Triangoli simili

Definizione: Due triangoli che siano rispettivamente congruenti a due triangoli omotetici si dicono simili.
Per le proprietà dell'omotetia due triangoli simili hanno angoli rispettivamente congruenti e i lati corrispondenti proporzionali.

Sussiste il seguente teorema 1:

Se due triangoli hanno lati corrispondenti proporzionali e angoli rispettivamente congruenti sono simili.

Il rapporto di due lati omologhi si dice rapporto di similitudine.
Se *questo* rapporto è l'unità, i due triangoli, avendo tre lati rispettivamente congruenti, sono congruenti; quindi *la congruenza di due triangoli è un caso particolare della similitudine.*
Come immediata conseguenza della definizione si ha che *se due triangoli sono simili a un terzo sono simili fra loro.*
Per decidere se due triangoli sono simili fra loro, non occorre verificare che siano soddisfatte tutte le condizioni prima poste al teorema 1, ma basta ricorrere a uno qualunque dei tre criteri di similitudine contenuti nei teoremi dei prossimi paragrafi.

1° criterio di similitudine

Due triangoli sono simili se hanno due angoli rispettivamente congruenti.
Dal primo criterio di similitudine dei triangoli si ha il seguente corollario.

Corollario: *Una retta parallela a un lato di un triangolo, stacca dal triangolo un triangolo simile al dato.*

2° criterio di similitudine

Due triangoli sono simili se hanno un angolo congruente compreso fra lati proporzionali.

3° criterio di similitudine

Due triangoli sono simili se hanno i tre lati rispettivamente proporzionali.

Corollario 1° Tutti i triangoli equilateri sono simili fra loro.
Corollario 2° Due triangoli isosceli sono simili se hanno congruenti gli angoli alla base o gli angoli al vertice.
Corollario 3° Due triangoli rettangoli sono simili se hanno un angolo acuto rispettivamente congruente o quando i cateti dell'uno sono proporzionali a quelli corrispondenti dell'altro.

In triangoli simili le basi stanno fra loro come le rispettive altezze.

I teoremi di Euclide

1° Euclide: In un triangolo rettangolo ogni cateto è medio proporzionale tra l'ipotenusa e la proiezione del cateto sull'ipotenusa.

2° Euclide: In un triangolo rettangolo l'altezza relativa alla ipotenusa è media proporzionale fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa.

Corde e secanti di una circonferenza

Teorema delle corde. Se due corde di una circonferenza si intersecano, i segmenti che si sono così formati su una di esse sono i medi e i segmenti sull'altra sono gli estremi di una stessa proporzione.
Teorema delle secanti. Condotte da un punto esterno a una circonferenza due secanti e considerati su ciascuna di esse i due segmenti aventi un estremo nel punto dato e l'altro estremo in una delle due intersezioni con la circonferenza, i segmenti di una secante sono i medi e i segmenti dell'altra sono gli estremi di una stessa proporzione.
Teorema della tangente e della secante. Se da un punto esterno a una circonferenza si conducono una tangente e una secante, il segmento di tangente compreso tra il punto esterno e il punto di contatto è medio proporzionale tra l'intera secante e la sua parte esterna.

Poligoni simili

Definizione Due poligoni si dicono simili se sono congruenti a poligoni omotetici.

Teorema: Due poligoni regolari dello stesso numero di lati sono simili.
Teorema: Se da due vertici omologhi di due poligoni simili si conducono tutte le possibili diagonali, i poligoni restano divisi nello stesso numero di triangoli rispettivamente simili.
Corollario: In due poligoni simili il rapporto di due diagonali omologhe è uguale a quello di due lati omologhi.

Teorema: I perimetri di due poligoni simili stanno fra loro come due lati omologhi.
Teorema: I perimetri di due poligoni regolari dello stesso numero di lati stanno fra loro come i raggi delle circonferenze circoscritte e come i rispettivi apotemi.
Teorema: I perimetri di due poligoni simili inscritti o circoscritti a due circonferenze stanno fra loro come i raggi delle circonferenze.
Teorema: Due triangoli simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi.
Teorema: Due poligoni simili stanno fra loro come i quadrati di due lati omologhi.

Sezione aurea di un segmento

Definizione: Si dice sezione aurea di un segmento quella parte del segmento che è media proporzionale tra l'intero segmento e la parte rimanente.
Quando di un segmento si determina la sua *parte aurea,* si dice anche che si è diviso il segmento in media ed estrema ragione. Quindi dividere un segmento in sezione aurea o in media ed estrema ragione significa dividerlo in due parti tali che la maggiore sia media proporzionale tra l'intero segmento e la parte restante
Teorema: Il lato di un decagono regolare è la sezione aurea del raggio della circonferenza circoscritta.